2010 年兰州大学数学分析考研试题

1．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x^2}+1-2\sqrt{1-x^2}}{\sin x^4+3\tan^5 x}$。

2．求定积分 $\int_1^e \sin(\ln x)dx$。

3．设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0)\\ 0,(x,y)=(0,0)\end{cases}$，求 $f_{xy}(0,0)$ 和 $f_{yx}(0,0)$。

4．计算积分 $\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\dfrac{\pi x}{2y}dy+\int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{4}\sin\dfrac{\pi x}{2y}dy$。

5．设 C 是柱面 $x^2+y^2=a^2$ 与平面 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{h}=1$ 的交线（$a,h>0$），且从 x 轴正向看为逆时针方向。计算积分 $I=\int\limits_C(z-x)dy+(x-y)dz$。

6．设 $f(x,y)=\begin{cases}x^2+y^2,z\geq\sqrt{x^2+y^2}\\ 0,z<\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}$，$\Sigma$ 为单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$，计算积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)dS$。

7．设实函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}(\dfrac{\sin t}{\sin x})^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，讨论 $f(x)$ 的连续性，并说明是否可在 $x=0$ 处定义 $f(0)$ 的值，使得 $f(x)$ 在该点可导。

8．已知函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶导数，并且 $f(x)>0$，$f''(x)<0$。记 $f(x)$ 的图像曲线为 C，过 C 上点 $M(t,f(t))$ $(t\in[a,b])$ 引切线，证明：当 t 变动时，由该切线与曲线 C 以及直线 $x=a$，$x=b$ 围成的平面图形面积可取到最小值，并求出此值。

9．用一致连续的定义验证 $f(x)=\sin(x^2)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致连续。

10．在区间 $[0,1]$ 上，函数 $f(x)$ 定义为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\left[\dfrac{1}{x}\right],x\in(0,1]\\ 0,x=0\end{cases}$，讨论 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的 Riemann 可积性。

11．设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的连续可导函数，记 $f^{-1}(0)=\{x\in[a,b]:f(x)=0\}$，假设 $f^{-1}(0)\neq\phi$，且对 $x\in f^{-1}(0)$，有 $f'(x)\neq 0$，证明：$f^{-1}(0)$ 是有限集。

12．设$D\subset R^2$是有界闭集，$f(x,y)$是D上的连续函数，证明：$f(x,y)$在D上有界，且一定取到最大值和最小值。

兰州大学 2010 年数学分析考研试题解答

1 解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x^2}+1-2\sqrt{1-x^2}}{\sin x^4+3\tan^5 x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}+1-2\sqrt{1-x^2}}{x^4}\frac{x^4}{\sin x^4+3\tan^5 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2xe^{-x^2}+\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^2}}}{4x^3}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{-e^{-x^2}\sqrt{1-x^2}+1}{x^2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{-x^2}\sqrt{1-x^2}+e^{-x^2}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{2x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2e^{-x^2}\sqrt{1-x^2}+e^{-x^2}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2+1}{2}$$

$$=\frac{3}{4}。$$

2 解 $I=\int_1^e \sin(\ln x)dx$

$$=\int_0^1 e^y\sin y dy$$

$$=e\sin 1-\int_0^1 e^y\cos y dy$$

$$=e\sin 1-(e\cos 1-1+\int_0^1 e^y\sin y dy)$$

$$=e\sin 1-e\cos 1+1-I,$$

$$\int_1^e \sin(\ln x)dx=\frac{1}{2}(e\sin 1-e\cos 1+1)。$$

3 解 当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，$f(x,y)=xy-\dfrac{2xy^3}{x^2+y^2}$，

$$f_x(x,y)=y-2y^3\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f_y(x,y)=x-2xy^2\frac{3x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=0,$$

而 $f_{xy}(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f_x(0,y)-f_x(0,0)}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y-2y}{y}=-1$，

$$f_{yx}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f_y(x,0)-f_y(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-0}{x}=1。$$

4 解 原式 $=\int_1^2 dy\int_y^{y^2}\sin\dfrac{\pi x}{2y}dx$

$$=-\int_1^2\frac{2y}{\pi}\cos\frac{\pi y}{2}dy$$

$$=-\frac{8}{\pi^3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}t\cos t dt$$

$$=\frac{4(2+\pi)}{\pi^3}。$$

5 解 设 $\Sigma=\{(x,y,z):x^2+y^2\le a^2,\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{h}=1\}$，

$$\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{h^2}}}(\frac{1}{a},0,\frac{1}{h})=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma),$$

$D=\{(x,y):x^2+y^2\le a^2\}$，

利用 Stokes 公式，得

$$I=\int_C(z-x)dy+(x-y)dz$$

$$=\iint_\Sigma(-2\cos\alpha+\cos\beta-\cos\gamma)dS$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{h^2}}}\iint_{\Sigma}(-\frac{2}{a}-\frac{1}{h})dS$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{h^2}}}(-\frac{2}{a}-\frac{1}{h})\iint_{D}\sqrt{1+\frac{h^2}{a^2}}dxdy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{h^2}}}(-\frac{2h+a}{ah})\cdot h\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{h^2}}\cdot\pi a^2$$

$=-\pi a(2h+a)$。

6 解 $\Sigma_1: z=\sqrt{1-x^2-y^2}$，$D=\{(x,y): x^2+y^2\le\frac{1}{2}\}$，

$dS=\sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2}dxdy=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy$，

$$I=\iint_{\Sigma}f(x,y,z)dS$$

$$=\iint_{\Sigma_1}f(x,y,z)dS$$

$$=\iint_{D}(x^2+y^2)\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}r^2\cdot\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}rdr$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3 tdt$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos^2 t)(-d\cos t)$$

$$=2\pi(\frac{1}{3}\cos^3 t-\cos t)\bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$=\dfrac{\pi}{6}(8-5\sqrt{2})$。

7 解 当 $x\ne k\pi$（k 为整数）时，

$$f(x)=\lim_{t\to x}(\frac{\sin t}{\sin x})^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$$

$$=\lim_{t\to x}\left[(1+\frac{\sin t-\sin x}{\sin x})^{\frac{\sin x}{\sin t-\sin x}}\right]^{\frac{x}{\sin x}}$$

$$=e^{\frac{x}{\sin x}},$$

而$\{k\pi\}_{k\in\mathbb{Z},k\neq0}$为$f$的第二类间断点，而$x=0$为$f$的可去间断点，可定义$f(0)=e$，使得$f(x)$

在$x=0$处连续。

且$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{\frac{x}{\sin x}}-e}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}e^{\frac{x}{\sin x}}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^2 x}$$

$$=e\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{2\sin x\cos x}$$

$$=0。$$

即$f(x)$在$x=0$处可导。

8 解 根据题设条件之，$f(x)$为上凸函数，根据题意所指面积

$$S(t)=\int_a^b\{[f'(t)(x-t)+f(t)]-f(x)\}dx$$

$$=f'(t)\frac{b^2-a^2}{2}-tf'(t)(b-a)+f(t)(b-a)-\int_a^b f(x)dx,$$

$$S'(\mathrm{t})=f''(t)\frac{b^2-a^2}{2}-[f'(t)+\mathrm{t}f''(t)](b-a)+f'(t)(b-a)$$

$$=f''(t)(b-a)[\frac{\mathrm{a+b}}{2}-\mathrm{t}],$$

当$\mathrm{a}\le\mathrm{t}<\dfrac{\mathrm{a+b}}{2}$时，$\mathrm{S}'(\mathrm{t})<0$；

当$\mathrm{t}=\dfrac{\mathrm{a+b}}{2}$时，$\mathrm{S}'(\mathrm{t})=0$；

当$\dfrac{\mathrm{a+b}}{2}<\mathrm{t}\le\mathrm{b}$时，$\mathrm{S}'(\mathrm{t})>0$，

所以$S(t)$在$\mathrm{t}=\dfrac{\mathrm{a+b}}{2}$处达到最小值，

$$\min_{\mathrm{a}\le\mathrm{t}\le\mathrm{b}}\mathrm{S}(\mathrm{t})=\mathrm{S}(\frac{\mathrm{a+b}}{2})=(\mathrm{b}-a)f(\frac{\mathrm{a+b}}{2})-\int_a^b f(x)dx。$$

9 取 $x_n=\sqrt{2n\pi}$， $y_n=\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$，

尽管有 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-y_n|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2n\pi}+\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}}=0$，

但 $|f(x_n)-f(y_n)|=1$，$(n=1,2,...)$，

故 $f(x)=\sin(x^2)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致连续。

10 解 由 $\left[\dfrac{1}{x}\right]\le\dfrac{1}{x}\le\left[\dfrac{1}{x}\right]+1$，知

$0\le f(x)<1$， $f(0)=0$， $f(1)=0$，

对正整数 $n\ge 2$，当 $x=\dfrac{1}{n}$， $f(\dfrac{1}{n})=0$，

当 $\dfrac{1}{n+1}<x<\dfrac{1}{n}$， $f(x)=\dfrac{1}{x}-n$，

$\lim\limits_{x\to(\frac{1}{n+1})^+}f(x)=1$，

$\lim\limits_{x\to(\frac{1}{n})^-}f(x)=0$。

于是，f 的间断点为 $\{0,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...\}$ 是可数集，且 $\{0,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...\}$ 只有唯一聚点，所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是 Riemann 可积的。

对任意 $0<\delta<1$，显然 $f(x)$ 在 $[\delta,1]$ 是 Riemann 可积的。

对于 $[0,1]$ 上的任意分割 $0=x_0<x_1<...<x_n=1$，

记 w_i 为 $f(x)$ 在区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上的振幅，$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，

$$\begin{aligned}\sum w_i\Delta x_i &=\sum_{x_i\in[0,\delta)}w_i\Delta x_i+\sum_{x_i\in[\delta,1]}w_i\Delta x_i\\ &\le\delta+\sum_{x_i\in[\delta,1]}w_i\Delta x_i,\end{aligned}$$

由此可推知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是 Riemann 可积。

11 证明 用反证法。

假若 $f^{-1}(0)$ 是无限集，则存在 $x_n\in[a,b]$，使得 $x_n\ne x_m$，$(n\ne m)$

$f(x_n)=0$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$，$x_0 \in [a,b]$，

由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，有 $f(x_n)=0$，即 $x_0 \in f^{-1}(0)$，

由题设条件 $f'(x_0)\neq 0$，存在 ξ_n 介于 x_n 与 x_0 之间，$\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n = x_0$，使得 $f'(\xi_n)=0$，

$f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，于是 $f'(x_0)=0$，矛盾。

所以假设不成立，故结论得证。

12 证明 书上的定理有证明。