2012年理学院数学系研究生复试数学综合试题

注：共9道试题，任选5道。选做超过5道题目只记前5道题目分数。

每题20分，总分100分。

一、设甲、乙、丙三人独立的向同一目标射击，击中目标的概率分别为0.6，0.5和0.4。

1. 求目标被击中的概率；
2. 若目标被击中，求恰有一人击中目标的概率。

二、设随机变量序列$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$,独立，同服从区间$[-a,a]$上的均匀分布，令：

$$\eta_n=\frac{\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-E\xi_k)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}D(\xi_k)}}$$

1.求η_n的特征函数；　　　　2.求η_n的渐近分布。

三、设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是独立同分布的随机变量，其密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}e^{-(x-\theta)}, x>\theta\\ 0, x\le\theta\end{cases},\qquad 令：X_{(1)}=\min_{1\le i\le n}X_i，T_n=CX_{(1)}$$

1. 试求C的值使$E(T_n-\theta)^2$达到最小；
2. 证明$T_n\xrightarrow{P}\theta$.　（$\xrightarrow{P}$表示以概率收敛）。

四、证明：$\int_C(z-\alpha)^n dz=0$，（n为不等于-1的整数），其中C是不经过α的任意闭曲线。

五、试证：多值函数$f(z)=\sqrt{z(1-z)}$在割去线段$0\le\operatorname{Re}z\le1$ 的z平面上可以分出两个单值解析分支，并求出在割线上岸取正值的那个分支在点$z=-1$的值。

六、如果$|a|>\frac{e^r}{r^n}$，证明：方程$e^z=az^n$，（n为正整数）在圆$|z|<r$内恰有n个根。

七、取$x_0=-\frac{\pi}{2}, x_1=0, x_2=\frac{\pi}{2}$为插值节点，建立$y$=sin$x$的Lagrange插值多项式及Newton插值多项式，并推导插值余项。

八、已知求解线性代数方程组 $\begin{pmatrix} 10 & a & 0 \\ b & 10 & b \\ 0 & a & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ 的 Jacobi 迭代格式对任意初始近似是收敛的。

1. 试推断参数 a 和 b 应满足的充分必要条件；
2. 取参数 $a=0$，$b=1$ 及初始向量 $\mathbf{x}^{(0)}=(0,0,0)^T$，用 Jacobi 迭代法求解该方程组的精确解。

九、针对初值问题 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y), & x > x_0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 的数值求解，用 Taylor 展开法确定数值格式 $y_{n+1} = y_n + h(af(x_n, y_n) + bf(x_{n-1}, y_{n-1}))$ 中的参数 a、b，并要求给出局部截断误差且指明方法的阶。