

一、填空题 (本大题共9小题, 每小题6分, 共54分)

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} [(x-3)e^{\frac{2}{x}} - x] = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 方程 $xy - e^x + e^y = 0$ 确定了 y 是 x 的函数, 则 y 在 $x=0$ 处的微分 $dy(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}$, $|x| < 2$ 的和函数 $s(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 设函数 $y(x)$ 由

$$\begin{cases} x = \arctan t \\ y = \operatorname{arccot} t \end{cases}$$

定义, 则 $\frac{d^3 y}{dx^3} \Big|_{t=1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $x^2 + y^2 + z^2 = yf(\frac{z}{y})$ 所确定, 其中 f 可微, 则 $(x^2 - y^2 - z^2) \frac{\partial z}{\partial x} + 2xy \frac{\partial z}{\partial y} = \underline{\hspace{2cm}}$.

6. 设 $\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{(x+2)^2} dx = a$, 则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{x+1} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

7. 设 D 是由 $x^2 + y^2 \leq 2x$ 所围成的平面区域,

则 $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x - x}{x - \sin x} \right)^{\arctan(\cot x - \frac{1}{x})} = \underline{\hspace{2cm}}$.

9. 曲线 $y = 2x - x^2$ 及直线 $y = 0, y = x$ 所围图形的面积

$S = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、计算题 (本大题共6小题, 每小题12分, 共72分)

1. 设 $U(x, y, z) = xyz$, 求 $U(x, y, z)$ 在点 $p(1, 1, 1)$ 处沿

$\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ 的方向导数。

2. 计算定积分 $\int_0^{\pi} t \sin^{2m} t dt$, 其中 m 为正整数。

3. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$ 的和。

4. 设 $y(x)$ 具有二阶连续导数, 且 $y'(0) = 0$, 试由方程

$$y(x) = 1 + \frac{1}{3} \int_0^x [-y''(t) - 2y(t) + 6te^{-t}] dt,$$

确定函数 $y(x)$ 。

5. 计算广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 2)(x^2 + 3)} dx$ 。

6. 计算曲面积分 $\oiint_{\Sigma} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$, 其中

$\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, Σ 的方向取外法线方向。