答案必须写在答题纸或答题卡上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；
目不允许使用计算器；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

一、填空题（本大题共6小题，每小题8分，共48分）

1. 令$s_n=\sum\limits_{k=n^3}^{(n+1)^3}\frac{1}{k^{\frac{2}{3}}}$,则$\lim\limits_{n\to\infty}s_n$ = ____。

2. 设C为圆周$x^2+y^2=a^2$，则$\oint_{C+}xy^2dy-x^2ydx=$ ____。

3. 已知$F(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x})=0$将$z$定义为$x,y$的函数且$F$可微。则$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$ ____。

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+(\tan x)^{\pi}}=$ ____。

5. 由方程$\ln\sqrt[3]{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}$所确定的隐函数$y=f(x)$的微分为 ____。

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\ln(1-\sin x^2)}=$ ____。

二、计算题（本大题共6小题，每小题15分，共90分）

1. 设$f(x)$连续且积分$\int_0^1 [f(x)+xf(xt)]dt$ 的值与x无关，试求$f(x)$。

2. 求微分方程 $xdy-2[y+xy^2(1+\ln x)]dx=0$ 的通解。

3. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^{2n}$ 的收敛域及和函数。

4. 计算积分$I=\iint\limits_D \frac{x^3}{y^2}dxdy$, D 是由 $x=2$, $y=x$, $xy=1$ 所围成的区域。

5. 设$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{n^\beta-(n-1)^\beta}=2012$, 求$\alpha$, β的值。

6. $f(x)$在$[-\pi,\ \pi]$上连续，且

$$f(x)=\frac{x}{1+\cos^2 x}+\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)\sin x+x^3\cos x]dx,$$

求$f(x)$。

三、证明题（本大题共 1 小题，共12分）

1. 设$f(x)$在$[0,\ 1]$上连续，且满足$f(1)=3\int_0^{1/3} xe^{1-x^2}f(x)dx$.
证明：至少存在一点$\xi\in(0,\ 1)$，使得$f'(\xi)=(2\xi-\xi^{-1})f(\xi)$.