

装备指挥技术学院 2012 年硕士研究生入学考试

高等数学 (702) 试题

(注意: 答案必须写在答题纸上, 本试卷满分 150 分)

一、填空题 (本题共 7 小题, 每小题 4 分, 满分 28 分。)

1. 若 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x + e^{2ax} - 1}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 则

$a =$ _____;

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) =$ _____;

3. 设 $y = xe^x$, 则 $y^{(n)}(x) =$ _____;

4. $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx =$ _____;

5. 设 $f'(e^x) = 1 + e^{2x}$, 则 $f(x) =$ _____;

6. 改变二重积分 $\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy$ 的次序 _____;

7. 函数 $z = \arctan \frac{x}{1+y^2}$, 求 $dz|_{(1,1)} =$ _____。

二、单项选择题 (本题共 7 小题, 每小题 4 分, 满分 28 分。)

8. 下列各式正确的是

(A) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = 1$ (B) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$

(C) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = e$ (D) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-x} = e$

9. 函数 $y = x^3 + 6x + 1$ 在其定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内

- (A) 图形为凸曲线; (B) 图形为凹曲线;
(C) 是单调增加的函数; (D) 是单调减少的函数。

10. 设 $y = y(x)$ 是由方程 $\sin y + xe^y = 1$ 所确定的隐函数, 则函数 y 在点 $(1, 0)$ 的法线方程的斜率为

- (A) -2 ; (B) $\frac{1}{2}$; (C) $-\frac{1}{2}$; (D) 2 。

11. 函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2(e^x - 1)}{(e^x - 1)}, & x > 0 \\ 2, & x = 0 \\ \frac{1}{x} \int_0^x \cos t^2 dt, & x < 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上

- (A) 处处连续; (B) 在 $x = 0$ 有第一类间断点;
(C) 有多个间断点; (D) 在 $x = 0$ 有第二类间断点。

12. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 无穷小量中的哪一个比其它三个的阶高

- (A) x^2 (B) $1 - \cos x$ (C) $\sqrt{1 - x^2} - 1$ (D) $x - \tan x$

13. 函数 $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$ 有三个驻点 $(0, 0)$, $(-1, -1)$, $(1, 1)$, 则下面的结论正确的是

- (A) $f(0, 0)$ 是极大值;
(B) $f(0, 0)$ 是极小值;
(C) $f(1, 1)$, $f(-1, -1)$ 都是极小值;

(D) $f(1,1)$, $f(-1,-1)$ 都是极大值。

14. 微分方程 $xy' = y \ln y$ 满足 $y|_{x=1} = e^2$ 的特解是

(A) $2e^x$; (B) $2x$; (C) e^2 ; (D) e^{2x}

三、解答题(本题共 8 小题, 满分 94 分。请写出必要的解题过程。)

15. (本题满分 10 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left[\left(\frac{2 + \cos x}{3} \right)^x - 1 \right]$

16. (本题满分 10 分) 求积分 $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx$

17. (本题满分 12 分) 计算 $\iint_D \frac{\ln y}{x} dx dy$, 其中 D 是由 $y = x, y = 1, x = 2$ 所

围成的三角形区域。

18. (本题满分 12 分) 函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $x^2 + y^2 + z^2 = yf\left(\frac{z}{y}\right)$ 所

确定, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 。

19. (本题满分 12 分) 解微分方程 $y'' + 2y' + 2y = 2e^x \cos x$ 。

20. (本题满分 14 分) 设抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过原点, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $y \geq 0$, 又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x = 1$ 所围成图形的面积为 $\frac{1}{3}$, 试确定 a 、 b 、 c , 使得图形绕 x 轴旋转一周而成的立体体积 V 最小。

21. (本题满分 12 分) 初始质量为 M_0 克, 在空气中自由落下的雨点均匀地蒸发着, 设蒸发的速度为 M 克/秒, 又空气阻力与雨点速度成正比,

如果开始雨点的速度为零，求雨点运动的速度和时间之间的函数关系。

22. (本题满分 12 分) 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有一、二阶导数，且 $f(-1)=0$ ，又 $g(x)=[\sin \pi(x+1)]f(x)$ ，证明：在 $(-1,1)$ 内至少存在一点 ξ ，使得 $g''(\xi)=0$ 。