

北京化工大学
2002 年攻读硕士学位研究生入学考试
高等代数与解析几何 试题

注意事项

- 1、答案必须写在答题纸上，写在试卷上均不给分。
- 2、答题时可不抄题，但必须写清题号。
- 3、答题必须用蓝、黑墨水笔或圆珠笔，用红色笔或铅笔均不给分。

一、(15 分)证明: 若两直线

$$l_1: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}, \quad l_2: \begin{cases} A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \\ A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0 \end{cases}$$

相交, 则

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0$$

二、(30 分)

1. 判断 $z=xy$ 表示什么曲面。
2. $z=xy$ 是否中心曲面? 若是, 求其对称中心。
3. $z=xy$ 有无对称轴? 若有, 求其对称轴。
4. $z=xy$ 有无对称平面? 若有, 求其对称平面。
5. $z=xy$ 是否直纹面? 若是, 求其直母线族。

三、(30 分) 设 P 是数域, $P^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in P, i = 1, 2, \dots, n\}$ 是

数域 P 上的 n 维向量空间, 证明: P^n 的每一个真子空间都是数域 P 上某个齐次线性方程组的解空间。

四、(30分) 设 A, B 是线性空间 V 中的线性变换, 1_V 是 V 中的单位变换, $\text{Ker } A, \text{Ker } B$ 分别是 A, B 的核, $\text{Im } A, \text{Im } B$ 分别是 A, B 的值域, 即象。

证明: 若 1、 $A^2 = A, B^2 = B$, 即 A, B 都是幂等变换;

$$2、A + B = 1_V ;$$

则 1、 $\text{Im } A = \text{Ker } B, \text{Im } B = \text{Ker } A$;

$$2、V = \text{Im } A \oplus \text{Im } B。$$

五、(30分) 设 A 是 n 级矩阵, $m_A(x)$ 是 A 的最小多项式, $f(x)$ 是多项式且其次数 $\partial(f(x)) \geq 1$ 。

证明: 1、若 $f(x) | m_A(x)$, 则 $f(A)$ 是退化矩阵, 即 $|f(A)| = 0$

2、若 $d(x) = (f(x), m_A(x))$, 即两多项式的首项系数为 1 的最大公因式, 则它们的秩相等: $r(f(A)) = r(d(A))$;

3、 $f(A)$ 是非退化矩阵的充要条件是 $(f(x), m_A(x)) = 1$ 。

六、(15分) 设 A, B 是 n 级实数矩阵。

证明: 若 A, B 在复数域上相似, 则 A, B 在实数域上也相似。