

**北京化工大学**  
**2002 年攻读硕士学位研究生入学考试**  
**高等代数与解析几何 试题**

注意事项

- 1、答案必须写在答题纸上，写在试卷上均不给分。
- 2、答题时可不抄题，但必须写清题号。
- 3、答题必须用蓝、黑墨水笔或圆珠笔，用红色笔或铅笔均不给分。

一、(15 分)证明: 若两直线

$$l_1: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}, \quad l_2: \begin{cases} A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \\ A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0 \end{cases}$$

相交, 则

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0$$

二、(30 分)

1. 判断  $z=xy$  表示什么曲面。
2.  $z=xy$  是否中心曲面? 若是, 求其对称中心。
3.  $z=xy$  有无对称轴? 若有, 求其对称轴。
4.  $z=xy$  有无对称平面? 若有, 求其对称平面。
5.  $z=xy$  是否直纹面? 若是, 求其直母线族。

三、(30 分) 设  $P$  是数域,  $P^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in P, i = 1, 2, \dots, n\}$  是

数域  $P$  上的  $n$  维向量空间, 证明:  $P^n$  的每一个真子空间都是数域  $P$  上某个齐次线性方程组的解空间。

四、(30分) 设  $A, B$  是线性空间  $V$  中的线性变换,  $1_V$  是  $V$  中的单位变换,  $\text{Ker } A, \text{Ker } B$  分别是  $A, B$  的核,  $\text{Im } A, \text{Im } B$  分别是  $A, B$  的值域, 即象。

证明: 若 1、 $A^2 = A, B^2 = B$ , 即  $A, B$  都是幂等变换;

$$2、A + B = 1_V ;$$

则 1、 $\text{Im } A = \text{Ker } B, \text{Im } B = \text{Ker } A$  ;

$$2、V = \text{Im } A \oplus \text{Im } B。$$

五、(30分) 设  $A$  是  $n$  级矩阵,  $m_A(x)$  是  $A$  的最小多项式,  $f(x)$  是多项式且其次数  $\partial(f(x)) \geq 1$ 。

证明: 1、若  $f(x) | m_A(x)$ , 则  $f(A)$  是退化矩阵, 即  $|f(A)| = 0$

2、若  $d(x) = (f(x), m_A(x))$ , 即两多项式的首项系数为 1 的最大公因式, 则它们的秩相等:  $r(f(A)) = r(d(A))$  ;

3、 $f(A)$  是非退化矩阵的充要条件是  $(f(x), m_A(x)) = 1$ 。

六、(15分) 设  $A, B$  是  $n$  级实数矩阵。

证明: 若  $A, B$  在复数域上相似, 则  $A, B$  在实数域上也相似。