

北京化工大学

攻读硕士学位研究生入学考试

(微生物与生化药学专业)

高等数学 样题

注意事项

1. 答案必须写在答题纸上，写在试卷上均不给分。
2. 答题时可不抄题，但必须写清题号。
3. 答题必须用蓝、黑墨水笔或圆珠笔，用红色笔或铅笔均不给分。

一、 填空题 (本题共 10 小题，每小题 6 分，满分 60 分)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{1-\cos x} = \underline{\hspace{2cm}}$
2. 曲线 $y = \frac{1}{x^2}$ 在点 $(-1, 1)$ 处的切线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$
3. 设 $xy - \sin(\pi y) = 0$ ，则 $y'' \Big|_{\substack{x=0 \\ y=1}} = \underline{\hspace{2cm}}$
4. 函数 $y = x^3 - 12x^2 + 36x$ 单调递减区间是 $\underline{\hspace{2cm}}$
5. $\int_{\frac{1}{e}}^e \frac{1}{x} |\ln x| dx = \underline{\hspace{2cm}}$
6. 已知曲线 $y = f(x)$ 过点 $(0, -\frac{1}{2})$ ，且其上任一点 (x, y) 处的切线斜率为 $x \ln(1+x^2)$ ，则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$
7. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵 $A^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$
9. 微分方程 $y' = \frac{y(1-x)}{x}$ 的通解是 $\underline{\hspace{2cm}}$
9. 已知 $f'(3) = 2$ ，则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3-x) - f(3)}{2x} = \underline{\hspace{2cm}}$
10. 设 $\begin{cases} x = a(\cos t + \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases}$ ，则 $\frac{d^2 y}{dx^2} = \underline{\hspace{2cm}}$

二 选择题 (本题共 10 小题，每小题 6 分，满分 60 分)

11. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续，若 $\int_0^{f(x)} t^2 dt = x^2(1+x)$ ，则 $f(2)$ 等于 ()

- (A) 6 (B) 36 (C) $\sqrt[3]{36}$ (D) $\sqrt[3]{6}$

12. 若矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_mb_1 & a_mb_2 & \cdots & a_mb_n \end{pmatrix}$$

其中 $a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_n$ 均为非零实数, 则矩阵的秩 $r(\mathbf{A})$ 等于 ()

- (A) n (B) m (C) 1 (D) 大于 1 而小于 $\min(m, n)$ 的实数

13. 曲线 $y = b\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} (0 \leq x \leq a)$ 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积为 ()

- (A) $\frac{1}{7}\pi ab^2$ (B) $\frac{3}{7}\pi a^2b$ (C) $\frac{3}{7}\pi a b^2$ (D) $\frac{1}{7}\pi a^2b$

14. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $\frac{1}{x} \cos \frac{1}{x^2}$ 为 ()

- (A) 无穷小量 (B) 无穷大量
 (C) 有界的, 但不是无穷小量 (D) 无界的, 但不是无穷大量

15. 设

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ xe^x & x < 0 \end{cases} \text{ 则在点 } x=0 \text{ 处, 函数 } f(x) \text{ ()}$$

- (A) 不连续 (B) 连续, 但不可导
 (C) 可导, 但导数不连续 (D) 可导且导数连续

16. 已知曲线 $y = x^2 + 2ax + 1$ 与 $y = e^x$ 在 $x = 0$ 处相切, 则 $a =$ ()

- (A) 1 (B) -1 (C) $-\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{2}$

17. 曲线 $y = x^2, x + y = 2$ 所围的平面图形的面积为 ()

- (A) $4\frac{1}{2}$ (B) 4 (C) $3\frac{1}{2}$ (D) 3

18. 设 $f(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上可微函数, 则 $f(x)f'(x)$ ()

- (A) 一定是偶函数 (B) 一定是奇函数
 (C) 不是偶函数, 就是奇函数 (D) 可能既不是奇函数, 也不是偶函数

19. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $x^2 \sin \frac{1}{x}$ 是 $\sin x$ 的 ()

- (A) 同阶无穷小但不等价 (B) 等价无穷小
 (C) 高阶无穷小 (D) 低阶无穷小

20. 设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的某邻域内有定义, 则 “ $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ 存在且等于 A ” 是 “ $f'(x_0)$ 存在且等于 A ” 的

- (A) 充分条件非必要条件 (B) 必要条件非充分条件
 (C) 充分必要条件 (D) 既非充分又非必要条件

三、解答题(解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

21 (18 分)

设 $f(x) = \sin x - \int_0^x (x-t)f(t)dt$, 其中 $f(x)$ 为连续函数, 求 $f(x)$

22 (20 分) 试问 λ 为何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$$

有唯一解, 并求出其解。

23 (15 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2 e^x)^{\frac{1}{1-\cos x}}$

24 (15 分)

计算 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x(\cos x + \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$

25 (24 分)

设 $z = x^2 f(\cos xy, \frac{y}{x})$, f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

26 (22 分) 设 a, b, c 为实数, 求证: 方程 $e^x = ax^2 + bx + c$ 的根不超过三个。

27 (22 分)

求立方抛物线 $y = x^3 (x \geq 0)$ 的一条切线, 使介于立方抛物线、切线及直线 $y = 0, x = 1$ 间的面积最小。

28 (22 分)

已知 $\lambda = 12$ 是矩阵 $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ 4 & a & 4 \end{pmatrix}$ 的一个特征值, 求 a 及另两个特征值, 并求属于各特征值的特征向量。

29 (22 分)

细菌在繁殖过程中不断产生毒素, 产生毒素的速率和现在的细菌个数成比例. 细菌个数增加到最大值后就以和现存细菌个数与毒素个数乘积成比例的速率减少. 问时刻 t 时, 细菌的个数以何种式子表示? 这里细菌的最多个数为 M , t 是从细菌达到最多个数时刻记起的时间, 规定当 $t = 0$ 时, 毒素的个数为 0。

