

院、系领导
审批并签名

广州大学 2009---2010 学年第二学期考试卷

课程 《数学分析》 考试形式 (闭卷, 考试)

学院 数学与信息科学 系 专业 数学与应用数学、信息与计算科学

09 级_____班 学号_____ 姓名_____

一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 函数 $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的麦克劳林展开式中, x^6 的系数为 _____。
 2. 曲线 $y = 1 + \sqrt[3]{x - 2}$ 的凸区间为 _____, 拐点为 _____。
 3. 光滑曲线 C 由极坐标方程 $r = r(\theta), \theta \in [\alpha, \beta]$ 表示, 则其弧长公式为 _____。
 4. 瑕积分 $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx =$ _____。
 5. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+3)}$ 的和为 _____。

三、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 若函数 $f(x)$ 在 x_0 取得极大值, 则必有 ()。

A. $f'(x_0) = 0$ B. $f''(x_0) < 0$

C. $f'(x_0) = 0$ 或 $f'(x_0)$ 不存在 D. $f'(x_0) = 0$ 且 $f''(x_0) < 0$

2. 设函数 $f(x)$ 的一个原函数为 $F(x)$, 则 $F(x^2)$ 是 () 的一个原函数。

A. $x f(x^2)$ B. $2x f(x^2)$ C. $x f(x)$ D. $2x f(x)$

3. 下列式子中，正确的是（ ）。

- A. $d\left(\int \frac{\sin x}{x} dx\right) = \frac{\sin x}{x}$ B. $\int \left(\frac{\sin x}{x}\right)' dx = \frac{\sin x}{x}$
C. $\frac{d}{dx} \left(\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt \right) = 0$ D. $\frac{d}{dx} \left(\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt \right) = \frac{\sin x}{x}$

4. 若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 中（ ），则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 必不可积。

- A. 无界函数 B. 有有限个间断点的函数
C. 非单调函数 D. 有无限个间断点的函数

5. 设 $f(x)$ 为定义在 $(0,1]$ 的非负函数，0 为其瑕点，且 $f(x)$ 在任何有限区间 $[u,1]$

可积。若 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^p f(x) = +\infty$ ，则（ ）。

- A. 当 $p < 1$ 时， $\int_0^1 f(x) dx$ 收敛 B. 当 $p \leq 1$ 时， $\int_0^1 f(x) dx$ 发散
C. 当 $p > 1$ 时， $\int_0^1 f(x) dx$ 收敛 D. 当 $p \geq 1$ 时， $\int_0^1 f(x) dx$ 发散

三、求下列极限或积分（每小题 6 分，共 24 分）

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{2x} (e^{t^2} - 1) dt}{x - \sin x}$

2. $\int \frac{9-x}{x^2+3x-10} dx$

$$3. \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^3 x - \cos^5 x} dx$$

$$4. \int_0^{\pi^2} \sin \sqrt{x} dx$$

四、判断反常积分或级数的敛散性 (每小题 6 分, 共 12 分)

1. 判断积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \arctan x}{1+x^2} dx$ 的敛散性。

2. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 是绝对收敛、条件收敛或发散。

五、应用题（每小题 7 分，共 14 分）

1. 直径为 6 的半圆中内接一个矩形，且矩形的一条边在直径上，问：当矩形的两边长各为多少时，矩形的周长最大？此时，矩形的周长为多少？

2. 利用定积分，推导椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 所围立体（椭球）的体积公式。

六、证明题(共 20 分)

1. 叙述并证明区间套定理。(8 分)

2. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n = 1$. 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛。(6 分)

3. 设 f 是 $(-\infty, +\infty)$ 上连续的偶函数, 证明: $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ 是奇函数。(6 分)