

3. 下列式子中, 正确的是 ()。

A. $d\left(\int \frac{\sin x}{x} dx\right) = \frac{\sin x}{x}$

B. $\int \left(\frac{\sin x}{x}\right)' dx = \frac{\sin x}{x}$

C. $\frac{d}{dx}\left(\int_1^2 \frac{\sin x}{x} dx\right) = 0$

D. $\frac{d}{dx}\left(\int_1^2 \frac{\sin x}{x} dx\right) = \frac{\sin x}{x}$

4. 若 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 中 (), 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 必不可积。

A. 无界函数

B. 有有限个间断点的函数

C. 非单调函数

D. 有无限个间断点的函数

5. 设 $f(x)$ 为定义在 $(0, 1]$ 的非负函数, 0 为其瑕点, 且 $f(x)$ 在任何有限区间 $[u, 1]$ 可积. 若 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^p f(x) = +\infty$, 则 ()。

A. 当 $p < 1$ 时, $\int_0^1 f(x) dx$ 收敛

B. 当 $p \leq 1$ 时, $\int_0^1 f(x) dx$ 发散

C. 当 $p > 1$ 时, $\int_0^1 f(x) dx$ 收敛

D. 当 $p \geq 1$ 时, $\int_0^1 f(x) dx$ 发散

三、求下列极限或积分 (每小题 6 分, 共 24 分)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{2x} (e^{t^2} - 1) dt}{x - \sin x}$

2. $\int \frac{9-x}{x^2+3x-10} dx$

3. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^3 x - \cos^5 x} dx$

4. $\int_0^{\pi^2} \sin \sqrt{x} dx$

四、判断反常积分或级数的敛散性 (每小题 6 分, 共 12 分)

1. 判断积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \arctan x}{1+x^2} dx$ 的敛散性。

2. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 是绝对收敛、条件收敛或发散。

五、应用题（每小题 7 分，共 14 分）

1. 直径为 6 的半圆中内接一个矩形，且矩形的一条边在直径上，问：当矩形的两边长各为多少时，矩形的周长最大？此时，矩形的周长为多少？

2. 利用定积分, 推导椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 所围立体 (椭球) 的体积公式。

六、证明题(共 20 分)

1. 叙述并证明区间套定理。(8 分)

2. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n = 1$. 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛。(6分)

3. 设 f 是 $(-\infty, +\infty)$ 上连续的偶函数, 证明: $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 是奇函数。(6分)