

院、系领导 审批并签名		B 卷
----------------	--	-----

广州大学 2010-2011 学年第 一 学期考试卷

课程 数学分析 1 考试形式 (闭卷, 考试)

学院 数学与信息科学 系 专业 数学与应用数学、信息与计算科学

班级 学号 姓名

题次	一	二	三	四	五				总分	评卷人
分数	10	15	36	8	31				100	
评分										

一、填空题 (2分 / 题, 共 10 分)

1、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n-1} \right)^n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3、设 $f(0) = f'(0) = 0$, 则极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

4、设 $S = \left\{ x \mid x = (-1)^n \frac{1}{n+1}, n \in N_+ \right\}$, 则 $\sup S = \underline{\hspace{1cm}}$; $\inf S = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

5、函数 $y = \sin^2 x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ 上满足罗尔中值定理公式中的 $\xi = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

二、单项选择题 (3分/题, 共 15 分)

1、 $x=0$ 是 $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ 的 ()。

- A. 第二类间断点; B. 跳跃间断点;
C. 可去间断点; D. 连续点;

2、函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续是 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处极限存在的 ()。

- A. 充分非必要条件; B. 必要非充分条件;
C. 充分必要条件 D. 既非充分也非必要条件

3、设 $f(x) = \begin{cases} (1-x)^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $k =$ ()。

- A. 1 B. e C. $\frac{1}{e}$ D. -1

4、下面结论中, 错误的是 ()。

A. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 的充要条件是 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k-1} = a$;

B. 数列 $\{a_n\}$ 与数列 $\{a_{n+k}\}$ (k 为正整数) 同敛散;

C. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 的充要条件是 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$;

D. 数列 $\{a_n\}$ 与数列 $\{ca_n\}$ (c 为任意常数) 同敛散;

5、当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ 是 x^α 的高阶无穷小, 则 α 的取值范围是 ()。

- A. $0 < \alpha < 3$ B. $0 < \alpha < 2$ C. $\alpha < 3$ D. $\alpha < 2$

三、计算题 (6 分/题, 共 36 分)

1、求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$ 。

2、求 $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin 2x + \cos x)^{\frac{1}{x}}$ 。

3、若 $f(x) = \begin{cases} e^{ax}, & x > 0 \\ b + \sin 2x, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处可导，求 a, b 的值。

4、设函数 $y = x \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^3}}$ ，求 y' 。

5、设 $y = \sin[u^2(x) + v^2(x)]$ ，其中 u, v 为可微函数，求 dy 。

6、设 $y = x \cdot e^{-x^2}$ ，求 y'' 。

四、应用题（8分）

设曲线的参数方程为 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$,

(1) 求该曲线在 $t = \frac{\pi}{2}$ 对应点的切线方程与法线方程；

(2) 计算二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 。

五、证明题（4 小题，共 31 分）

1、设 $x > 0$ ，证明不等式 $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$ 。（8 分）

2、证明：方程 $x^3 - 3x + 4 = 0$ 在区间 $[0,1]$ 内不可能有两个不同的实根。（8 分）

3、设函数 $f(x)$ 在区间 I 上满足 Lipschitz 条件: $\exists L > 0, \forall x_1, x_2 \in I,$
有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$, 证明 f 在区间 I 上一致连续。 (7分)

4、证明极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 不存在。 (8分)